

PRÉPARATION À L'AGRÉGATION EXTERNE : THÉORÈMES DE CARTAN-DIEUDONNÉ

TONY LIMAGNE

Le développement ci-dessous est adapté pour les leçons 108, 158, 161 et 191.

1. LE CAS EUCLIDIEN

Soit E un espace euclidien. On note $O(E)$ le groupe des isométries vectorielles de E , c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes f de E tels que

$$\forall x, y \in E, \quad (f(x), f(y)) = (x, y).$$

Lorsque H est un hyperplan de E , la symétrie orthogonale sur H est un élément de $O(E)$ appelée *la réflexion de E d'hyperplan H* .

Théorème 1 (Cartan-Dieudonné "vectoriel"). Soit E un espace euclidien de dimension n . Toute isométries vectorielles de E , distincte de id_E , s'écrit comme la composée d'au plus n réflexions de E . De plus, il existe des isométries vectorielles de E qui s'écrivent exactement comme la composé de n réflexions de E .

Démonstration. On procède par récurrence sur la dimension n de E . Lorsque E est un espace euclidien de dimension 1 on a $O(E) = \{\text{id}_E, -\text{id}_E\}$ et $-\text{id}_E$ est bien une réflexion (associée à l'hyperplan $\{0\}$). Fixons $n \geq 2$ et supposons le théorème 1 vrai pour les espaces euclidiens de dimension $n - 1$. Soit E un espace euclidien de dimension n et soit $f \in O(E)$ distincte de $\{\text{id}_E\}$.

Supposons que f admet 1 pour valeur propre. Soit $e \in E$ un vecteur propre associé et $H = e^\perp$. On observe que pour tout $h \in H$ on a

$$(f(h), e) = (f(h), f(e)) = (h, e) = 0,$$

si bien que $f(H) \subseteq H$. Et puisque $f(e) = e$ on a $f|_H \neq \text{id}_H$ car sinon $f = \text{id}_E$. Ainsi $f|_H$ est une isométrie vectorielle de H distincte de id_H . On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence (H est de dimension $n - 1$) : il existe des réflexions $s_1, \dots, s_r$ de H telles que

$$f|_H = s_1 \circ \dots \circ s_r.$$

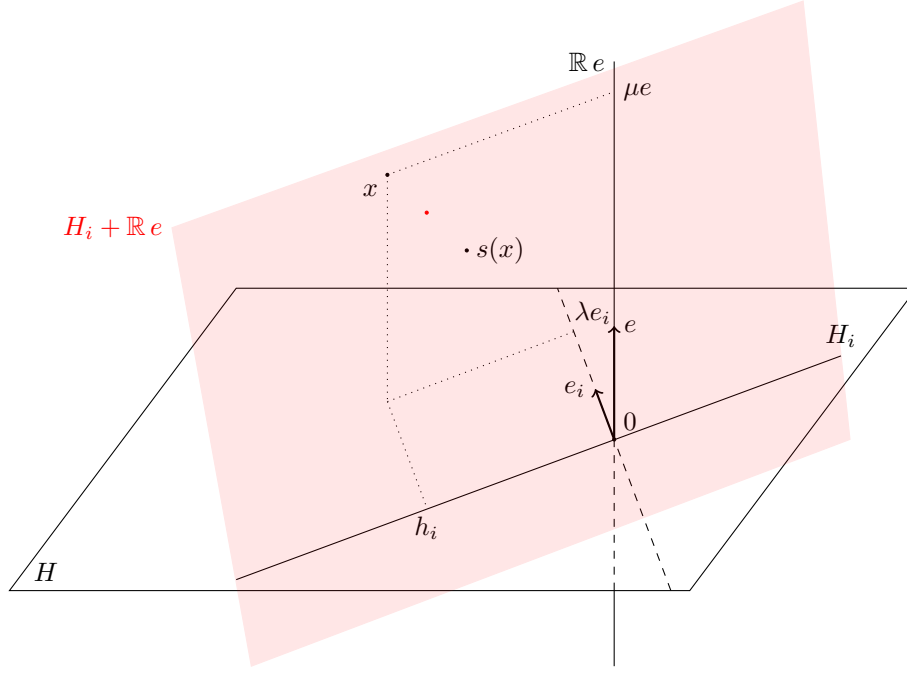
Fixons $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Notons H_i l'hyperplan de H associé à s_i et e_i un vecteur normal à H_i dans H . On a la décomposition

$$E = H \oplus \mathbb{R}e = H_i \oplus \mathbb{R}e_i \oplus \mathbb{R}e.$$

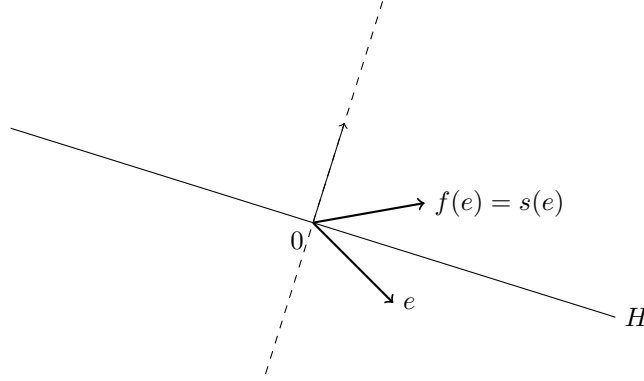
Soit $x \in E$ que l'on écrit $x = h_i + \lambda e_i + \mu e$ avec $h_i \in H$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On prolonge s_i en une réflexion de E en posant

$$s_i(x) = h_i + \mu e - \lambda e_i.$$

Et puisque $s_i(e) = e = f(e)$ on a alors $f = s_1 \circ \dots \circ s_r$. Ici on a $r \leq n - 1$ par hypothèse de récurrence.



Supposons que f n'admet pas 1 pour valeur propre. Fixons $e \in E$ non nul et soit $a = f(e) - e$. La réflexion s de E d'hyperplan $a^\perp$ vérifie $s(e) = f(e)$ et donc $s(f(e)) = e$.



Ainsi 1 est valeur propre de l'isométrie vectorielle $s \circ f$. On a bien $s \circ f \neq \text{id}_E$ car sinon f est la réflexion s qui admet 1 pour valeur propre. On peut donc appliquer le point précédent : il existe $s_1, \dots, s_r$ des réflexions de E telles que

$$s \circ f = s_1 \circ \dots \circ s_r,$$

ou encore $f = s \circ s_1 \circ \dots \circ s_r$. Ici on a $r + 1 \leq n$ toujours d'après le point précédent.

À ce stade, nous venons de montrer que toute isométrie vectorielle de E s'écrit en produit d'au plus n réflexions. Soient f une isométrie vectorielle de E et $s_1 \circ \dots \circ s_r$ une décomposition de f en produit de réflexions de E . Supposons que $r \leq n - 1$. Notons $H_1, \dots, H_r$ les hyperplans respectifs de $s_1, \dots, s_r$. Comme $f = s_1 \circ \dots \circ s_r$ et

que $(s_i)|_{H_i} = \text{id}_{H_i}$ pour tout i , la restriction de f au sous-espace $H = H_1 \cap \dots \cap H_r$ est l'identité. Et puisque $H_1, \dots, H_r$ sont des hyperplans de E on sait que

$$\dim(H) \geq n - r \geq 1.$$

On en déduit qu'il existe $e \in H$ non nul tel que $f(e) = e$. En résumé, une isométrie vectorielle de E se décompose en produit au plus $n - 1$ réflexions si et seulement si elle admet 1 pour valeur propre. Or $-\text{id}_E$ est une isométrie vectorielle de E qui n'admet pas 1 pour valeur propre, elle se décompose donc en un produit d'exactly n réflexions de E . $\square$

Référence : [T1, Thème 5, §1, Théorème 1.1.2].

- Remarque 2.** (1) Le théorème dit en résumé que le groupe $O(E)$ est engendré par l'ensemble des réflexions de E , avec en prime une précision sur l'écriture.
- (2) À isométrie vectorielle fixée, on peut être encore plus précis sur la décomposition : si $f \in O(E)$ et si p_f est la codimension de $\ker(f - \text{id}_E)$ alors f peut s'écrire comme composée de p_f réflexions, et ne peut pas s'écrire comme produit de moins de p_f réflexions (voir [T2, Chap. XX1, §4, Théorème 4.4]).

2. THÉORÈME DE CARTAN DIEUDONNÉ "AFFINE"

On se place dans un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension n et de direction E .

Proposition 3. Soit f une isométrie de $\mathcal{E}$. Il existe un couple (g, t_a) formé d'une isométrie g de $\mathcal{E}$ ayant un ensemble non vide G de points fixes et d'une translation t_a de vecteur $a \in \vec{G}$ tel que

$$f = t_a \circ g = g \circ t_a.$$

Démonstration. Unicité. Supposons que $f = t_a \circ g$ avec g et a comme dans l'énoncé. On a $\vec{f} = \vec{t}_a \circ \vec{g}$ et donc $\ker(\vec{f} - \text{id}_E) = \ker(\vec{g} - \text{id}_E) = \vec{G}$. Soit $A \in G$ un point fixe de g . On a $f(A) = t_a(A)$ et donc $A\vec{f}(A) = A\vec{t}_a(A) = a \in \ker(\vec{f} - \text{id}_E)$.

Soit $f = t_{a'} \circ g'$ une autre décomposition. Pour tout point fixe A' de g' on a aussi $A'\vec{f}(A') = a' \in \ker(\vec{f} - \text{id}_E)$ si bien que par la relation de Chasles

$$a - a' = \overrightarrow{AA'} - \vec{f}(\overrightarrow{AA'}) \in \ker(\vec{f} - \text{id}_E) \cap \text{Im}(\vec{f} - \text{id}_E).$$

Or on a $E = \ker(\vec{f} - \text{id}_E) \oplus \text{Im}(\vec{f} - \text{id}_E)$ puisque $\vec{f}$ est une isométrie de E . En particulier on a en déduit que $a = a'$ et donc $t_a = t_{a'}$, ce qui implique que $g = g'$.

Existence. On se donne $a \in \ker(\vec{f} - \text{id}_E)$. Il suffit de trouver $A \in \mathcal{E}$ tel que $A\vec{f}(A) = a$, puis ensuite de poser $g = t_{-a} \circ f$ qui est bien une isométrie de $\mathcal{E}$ vérifiant $f = t_a \circ g$. Fixons O une origine de $\mathcal{E}$ et soit $b \in E$ tel que $O\vec{f}(O) = a - \vec{f}(b) - b$. On a pour tout point $M \in \mathcal{E}$.

$$\begin{aligned} M\vec{f}(M) &= \overrightarrow{MO} + O\vec{f}(O) + \overrightarrow{OM}\vec{f}(M), \\ &= \overrightarrow{MO} + a + \vec{f}(b) + \vec{f}(\overrightarrow{OM}), \\ &= a + (\vec{f} - \text{id}_E)(b - \overrightarrow{OM}). \end{aligned}$$

On observe qu'en choisissant A tel que $O\vec{A} = -b$ on obtient bien $A\vec{f}(A) = a$. Enfin on a bien $g \circ t_a = t_a \circ g$ car pour tout point $M \in \mathcal{E}$

$$g(M + a) = g(M) + \vec{g}(a) = g(M) + \vec{f}(a) = g(M) + a.$$

□

Référence : [T1, Thème 5, §2, Théorème 2.1.3].

Corollaire 4 (Cartan-Dieudonné "affine"). Si f est une isométrie de $\mathcal{E}$ distincte de $\text{id}_{\mathcal{E}}$ alors f s'écrit comme la composée d'au plus n réflexions affines de $\mathcal{E}$.

Démonstration. D'après le théorème 1 il existe des réflexions vectorielles $s_1, \dots, s_r$ de E telles que $\vec{f} = s_1 \circ \dots \circ s_r$. On note F l'ensemble des points fixes de f .

Supposons $F \neq \emptyset$ et soit $A \in F$. Fixons $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$ on pose

$$\sigma_i(M) = A + s_i(\overrightarrow{AM}),$$

pour avoir $\overrightarrow{\sigma_i} = s_i : \sigma_i$ est donc une réflexion affine de $\mathcal{E}$ qui fixe A . Les applications affines f et $\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_k$ coïncident en A et ont mêmes applications linéaires associées : elles sont donc égales.

Supposons $F = \emptyset$. D'après la proposition 3, il existe une translation t_a et une isométrie g de $\mathcal{E}$ possédant au moins un point fixe telles que $f = t_a \circ g$. On conclut en appliquant le cas précédent à g et en observant qu'une translation peut s'écrire comme composée de deux réflexions affines. □

Référence : [T1, Thème 5, §2, Théorème 2.2.1].

3. QUELQUES QUESTIONS BÊTES AUXQUELLES IL FAUT ABSOLUMENT SAVOIR RÉPONDRE RAPIDEMENT

- (1) On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Trouver la décomposition en produit de réflexions de $-\text{id}_{\mathbb{R}^2}$.
- (2)
- (3)

RÉFÉRENCES

- [T1] C. Tisseron, *Géométries affine, projective et euclidienne*, Formations des enseignants et formation continue, Hermann, 2000.
- [T2] P. Tauvel, *Algèbre pour l'agrégation interne*, Masson, 1996.